

Фазовое пространство — пространство, каждая точка которого соответствует одному и только одному состоянию из множества всех возможных состояний систем (состояние — точка фазового пространства).

Динамическая система — множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы.

Более строго: динамической системой, заданной на гладком многообразии X , называется отображение $g : R \times X \rightarrow X$, записываемое в параметрическом виде $g^t(x)$, где $t \in R$, $x \in X$, которое является дифференцируемым отображением.

Диффеоморфизм — взаимно однозначное и гладкое отображение, обратное к которому тоже является гладким.

Грубая динамическая система:

- (из слайда Шведовского)

На плоскости задано множество двумерных динамических систем: $Dx/dt = X(x)$, где $X(x_1, x_2) — C^r$ - гладкая ($r \geq 1$) функция, определенная в замкнутой ограниченной области $G \subset R^2$.

Динамическая система $X(x)$ называется **грубой** в области G , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что все системы в δ -окрестности X топологически эквивалентны X и гомеоморфизм, который устанавливает эту эквивалентность, является ε -близким к тождественному (то есть расстояние между двумя соответствующими точками меньше, чем ε)

- (из учебника Андронова)

это система дифференциальных уравнений, у которой топологическое поведение траекторий не меняется при малых возмущениях правой части.

Стивен Смейл доказал в 1965 году, что при размерности фазового пространства $n \geq 3$ существуют динамические системы (диффеоморфизм трехмерного тора), в окрестности которых нет ни одного структурно устойчивого (грубого) диффеоморфизма.

Это означает, что на четырехмерном многообразии имеется векторное поле, которое нельзя сделать структурно устойчивым посредством малого шевеления.

Это разрушило надежды математической общественности на построение классификации "грубых систем" для размерности фазового пространства $n \geq 3$.